Varianta 39

Subiectul I

a) $Re(z)=1$

b) $P=6$.

c) $a=-1, b=2$.

d) $1+i+i^2+i^3+i^4=1$.

e) $R=\frac{5}{2}$.

f) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul II

1.

a) $n=5$.

b) $f(f(2))=5$.

c) $a=-1$.

d) $e=-7\in \mathbf{R}$.

e) $A^2=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2.

a) $f'(x)=3x^2, \forall x\in \mathrm{R}$.

b) $x=-2$.

c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=3$.

d) $x_1=x_2=0$ și $x_3=-3$.

e) $\int_{-1}^{0} f(x)dx=\frac{31}{4}$.

Subiectul III

Pentru $a\in \mathbf{R}^*$, notăm $f_a:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_a=ax+1-a$. Deci $G=\{f_a \mid a\in\mathbf{R}^*\}$.

a) $(f_a\circ f_b)(x)=f_a(f_b(x))=a(bx+1-b)+1-a=abx+1-ab \Rightarrow f_a\circ f_b=f_{ab}$, cu $ab\neq 0$.

b) $1_{\mathbf{R}}=f_1\in G$.

c) $f_a\circ 1_{\mathbf{R}}=f_a\circ f_1=f_{a\cdot 1}=f_a=1_{\mathbf{R}}\circ f_a, \forall f_a\in G$.

d) Din $ax+1-a=x \Rightarrow\ x(a-1)=a-1,\ a\in R^{*}, a\neq 1 \Rightarrow\ x=1$.

e) $g(x)=\dfrac{x-1+a}{a}=f_{\frac{1}{a}}$. Cum $f_a\circ f_{\frac{1}{a}}=f_{a\cdot\frac{1}{a}}=f_1=1_{\mathbf{R}}$ şi $f_{\frac{1}{a}}\circ f_a=f_{\frac{1}{a}\cdot a}=f_1=1_{\mathbf{R}}$

obținem $f\circ g=g\circ f=1_{\mathbf{R}}$.

f) Compunerea funcțiilor este asociativă; din **a)** rezultă partea stabilă ; din **b)** şi **c)** elementul neutru este $1_{\mathbf{R}}$; din **e)** rezultă că $\forall a\in \mathbf{R}^{*}, (f_a)^{-1}=f_{\frac{1}{a}}$.

Cum $f_a\circ f_b=f_{ab}=f_b\circ f_a$ rezultă că „$\circ$” este comutativă.

Deci $(G,\circ)$ este grup abelian.

g) Din $f(x_0)=ax_0+1-a=x_0$, rezultă $x_0(a-1)=a-1$.

Pentru $a=1$ obținem o infinitate de soluții.

Pentru $a\neq 1 \Rightarrow x_0=1$.

Subiectul IV

a) $x+\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{x^3+3x}{x^2+1}=f(x), \forall x\in\mathbf{R}$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln(x^2+1)\right)\Big|_{-1}^{1}=0$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{2x}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x}{x^2+1}=-\infty$.Deci funcția nu admite asimptotă orizontală spre $-\infty$. Asimptota oblică este $y=mx+n$, unde $\displaystyle m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x}{x^3+x}=1$ şi

$\displaystyle n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{2x}{x^2+1}-x\right)=0$, deci $y=x$ este asimptota oblică spre $-\infty$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2}+\ln(x^2+1)}{x^2}=\frac{1}{2}$, deoarece $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}=0$.

f) $f'(x)=\left(x+\dfrac{2x}{x^2+1}\right)'=1+\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+3}{(x^2+1)^2}$.

g) $f'(x)>0, \forall x\in\mathbf{R}$, deci funcția f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.